

1 Základní typy rovnic a nerovnic

1.1 Lineární rovnice a nerovnice

Základní příklady

Příklad 1.1. Řešte rovnici $|2x + 3| - |x - 1| = -1$.

| A | B | C | D | E |
|----------|------------------------|----------|--------------------|--|
| $x = -5$ | $x \in \{-5, -3, -1\}$ | $x = -1$ | $x \in \{-3, -1\}$ | Žádná z ostatních možností není správná. |

Řešení: D.

Postup řešení: Nejprve určíme nulové body výrazů v absolutní hodnotě:

$$2x + 3 = 0 \text{ pro } x = -\frac{3}{2},$$

$$x - 1 = 0 \text{ pro } x = 1.$$

Nulovými body $-\frac{3}{2}, 1$ rozdělíme množinu \mathbb{R} na tři intervaly, v každém z nich „odstraněním“ absolutních hodnot převedeme danou rovnici na rovnici lineární:

| | $(-\infty, -\frac{3}{2})$ | $\langle -\frac{3}{2}, 1 \rangle$ | $\langle 1, +\infty \rangle$ |
|----------|---------------------------|-----------------------------------|------------------------------|
| $2x + 3$ | - | + | + |
| $x - 1$ | - | - | + |

1) Pro $x \in (-\infty, -\frac{3}{2})$ má rovnice tvar

$$-2x - 3 + x - 1 = -1,$$

$$-x - 4 = -1,$$

$$x = -3.$$

Protože $-3 \in (-\infty, -\frac{3}{2})$, je číslo $x = -3$ řešení dané rovnice.

2) Pro $x \in \langle -\frac{3}{2}, 1 \rangle$ má rovnice tvar

$$2x + 3 + x - 1 = -1,$$

$$3x + 2 = -1,$$

$$x = -1.$$

Protože $-1 \in \langle -\frac{3}{2}, 1 \rangle$, je číslo $x = -1$ řešení dané rovnice.

3) Pro $x \in \langle 1, +\infty \rangle$ má rovnice tvar

$$2x + 3 - x + 1 = -1,$$

$$x + 4 = -1,$$

$$x = -5.$$

Protože $-5 \notin \langle 1, +\infty \rangle$, v uvažovaném intervalu nemá daná rovnice řešení.

Daná rovnice tedy má dvě řešení $x_1 = -3$ a $x_2 = -1$. □

Příklad 1.2. Řešte nerovnici $-4x < 20$.

| A | B | C | D | E |
|----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|------------------|
| $x \in (-\infty, 5)$ | $x \in (-\infty, -5)$ | $x \in (5, +\infty)$ | $x \in (-5, +\infty)$ | $x \in (-4, 20)$ |

Řešení: D.

Příklad 1.3. Řešte nerovnici $-3 \leq -x + 4 < 2$.

| A | B | C | D | E |
|----------------|------------------------------|------------------------------|--------------------------------|----------------|
| $x \in (2, 7)$ | $x \in \langle 2, 7 \rangle$ | $x \in \langle 1, 6 \rangle$ | $x \in \langle -3, -2 \rangle$ | $x \in (1, 6)$ |

Řešení: A.

Příklad 1.4. Určete počet celočíselných řešení nerovnice

$$(2 - x)^3 (x + 2)^2 (x - 3) \geq 0.$$

| A | B | C | D | E |
|---|------------------------|---|---|-----------------|
| 2 | $\langle 2, 3 \rangle$ | 0 | 3 | nekonečně mnoho |

Řešení: D.

Příklad 1.5. Řešte nerovnici $|x - 5| < 8$.

| A | B | C | D | E |
|--|-----------------------|------------------|------------------|--|
| $x \in (-\infty, -13) \cup (3, +\infty)$ | $x \in (-\infty, 13)$ | $x \in (-13, 3)$ | $x \in (-3, 13)$ | $x \in (-\infty, -3) \cup (13, +\infty)$ |

Řešení: D.

Příklad 1.6. Najděte nejmenší celé číslo, které je řešením nerovnice

$$|x - 1| + |x + 1| < 4.$$

| A | B | C | D | E |
|----|----|---|---|------------|
| -2 | -1 | 1 | 2 | neexistuje |

Řešení: B.

.....

Doplňující příklady

Příklad 1.7. Najděte součet řešení rovnice $|4x - 8| + |2 - x| = 4$.

| A | B | C | D | E |
|-----|-----|-----|---|---|
| 2,8 | 1,2 | 1,6 | 4 | 3 |

Řešení: D.

Příklad 1.8. Nalezněte řešení rovnice $|2x - 1| - |2 - 3x| = 5$ a rozhodněte, které tvrzení je pravdivé.

| A | B | C | D | E |
|--------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------|--|
| Rovnice má právě jedno řešení. | Rovnice má právě 2 různá řešení. | Rovnice má právě 3 různá řešení. | Rovnice nemá řešení. | Žádná z ostatních možností není správná. |

Řešení: D.

Příklad 1.9. Najděte součet řešení rovnice $||1 - x| - |x + 3|| = |x + 1|$.

| A | B | C | D | E |
|----|----|----|----|--|
| -1 | -2 | -3 | -4 | Žádná z ostatních možností není správná. |

Řešení: C.

Příklad 1.10. Řešte nerovnici $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} \leq 4$.

| A | B | C | D | E |
|------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|-----------------------|-----------------------|
| $x \in \langle 4, +\infty \rangle$ | $x \in (-\infty, 4)$ | $x \in \langle 24, +\infty \rangle$ | $x \in (-\infty, 24)$ | $x \in (-\infty; 24)$ |

Řešení: E.

Příklad 1.11. Najděte hodnotu parametru a , pro který všechna reálná čísla jsou řešení nerovnice $3x - 1 < ax + 5$.

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 1 | 5 | 0 | 6 |

Řešení: A.

Příklad 1.12. Kolik celočíselných řešení má nerovnice $-x - 5 < -3x < x - 1$?

| A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|------------|
| 0 | 1 | 2 | 3 | více než 3 |

Řešení: C.

Příklad 1.13. Řešte nerovnici $(x - 3)(x + 5)(4 - x) \geq 0$.

| A | B | C | D | E |
|---|---|--|--|----------------------|
| $x \in (-\infty, -5) \cup \langle 3, 4 \rangle$ | $x \in \langle -5, 3 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$ | $x \in \langle -4, -3 \rangle \cup \langle 5, +\infty \rangle$ | $x \in (-\infty, -4) \cup \langle -3, 5 \rangle$ | $x \in (-\infty, 4)$ |

Řešení: A.

Příklad 1.14. Určete množinu řešení nerovnice $(x - 2)^2(x + 3) \leq 0$.

| A | B | C | D | E |
|-----------------------------------|-----------------|-------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $(-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ | $(-\infty, -3)$ | $\langle -3, 2 \rangle$ | $(-\infty, -3) \cup \{2\}$ | $(-\infty, -2) \cup \{3\}$ |

Řešení: D.

Příklad 1.15. Řešte nerovnici $|3x| < x + 1$.

| A | B | C | D | E |
|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|---|--------------------------------|
| $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ | $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ | $x \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ | $x \in (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{4})$ | $x \in (\frac{1}{4}, +\infty)$ |

Řešení: C.

Příklad 1.16. Určete množinu řešení nerovnice $|x - 1| + 2x > 4$.

| A | B | C | D | E |
|--------------------------|----------------|--------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| $(\frac{5}{3}, +\infty)$ | $(3, +\infty)$ | $(\frac{5}{3}, 3)$ | $(1, \frac{5}{3}) \cup (3, +\infty)$ | $(-3, 1) \cup (\frac{5}{3}, +\infty)$ |

Řešení: A.

Příklad 1.17. Řešte nerovnici $|x + 3| > |x - 2|$.

| A | B | C | D | E |
|--------------------|---|---------------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| $x \in \mathbb{R}$ | $x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$ | $x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ | $x \in (-\frac{1}{2}, 2)$ | $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$ |

Řešení: E.

Nápověda: Tento příklad se hezky vyřeší umocněním obou částí na druhou a použitím vzorce $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. \square

1.2 Kvadratické rovnice a nerovnice

Základní příklady

Příklad 1.18. Najděte všechny hodnoty parametru c , pro které rovnice $3x^2 - 2x + c = 0$ má alespoň jeden společný kořen s rovnicí $x^2 + x - 2 = 0$.

| A | B | C | D | E |
|----------|------|---------|-------|--------|
| -5; -1,6 | 8; 1 | -16; -1 | 8; -1 | 5; 1,6 |

Řešení: C.

Příklad 1.19. Řešte nerovnici $x^2 + 7x - 30 \geq 0$.

| A | B | C | D | E |
|--------------------------------|--|--|--------------------------------|---|
| $x \in \langle -10, 3 \rangle$ | $x \in (-\infty, -10) \cup (3, +\infty)$ | $x \in (-\infty, -3) \cup (10, +\infty)$ | $x \in \langle -3, 10 \rangle$ | $x \in (-\infty, 3) \cup (10, +\infty)$ |

Řešení: B.

Příklad 1.20. Řešte nerovnici $-x^2 + 3x + 10 > 0$.

| A | B | C | D | E |
|----------------|---|-----------------|---|-----------------|
| $x \in (2, 5)$ | $x \in (-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$ | $x \in (-5, 2)$ | $x \in (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$ | $x \in (-2, 5)$ |

Řešení: E.

Příklad 1.21. Určete nejmenší řešení nerovnice $|x^2 - x + 1| \geq |x^2 - 3x + 4|$.

| A | B | C | D | E |
|-------------------|---------|---------|-------------------|------------|
| $x = \frac{1}{2}$ | $x = 0$ | $x = 2$ | $x = \frac{3}{2}$ | neexistuje |

Řešení: D.

Nápověda: Na první pohled tento příklad můžeme řešit stejně jako př. 1.17 umocněním obou částí na druhou. Jinak si ale můžeme hned všimnout, že absolutní hodnoty je možné hned odstranit. \square

.....

Doplňující příklady

Příklad 1.22. Určete hodnoty reálného parametru p tak, aby v rovnici $3x^2 - 24x + p = 0$ byl jeden kořen trojnásobkem druhého kořene, a rozhodněte, které tvrzení je pravdivé.

| A | B | C | D | E |
|----------------------------------|-----------|----------|---------------------------------|--|
| Takových p je nekonečně mnoho. | $p = 108$ | $p = 12$ | Takový parametr p neexistuje. | Žádná z ostatních možností není správná. |

Řešení: E.

Příklad 1.23. Určete hodnoty parametrů a, b, c tak, aby rovnost $(2a - 3x)(bx + 3) = 9x^2 + 2cx + 2$ platila pro každé reálné číslo x , a rozhodněte, které tvrzení je pravdivé.

| A | B | C | D | E |
|--|--|--|--------------------------------------|--|
| Existuje více trojic parametrů splňujících podmínky. | Součin všech parametrů je $\frac{11}{2}$. | $a = 3,$ $b = -3,$ $c = \frac{11}{2}.$ | Takové hodnoty parametrů neexistují. | Žádná z ostatních možností není správná. |

Řešení: B.

Příklad 1.24. Řešte nerovnici $(x - 1)^2 < 16$.

| A | B | C | D | E |
|-----------------|-----------------|-----------------|---|---|
| $x \in (-5, 3)$ | $x \in (-4, 4)$ | $x \in (-3, 5)$ | $x \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty)$ | $x \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$ |

Řešení: C.

Příklad 1.25. Máme množiny $A = \{x \mid x^2 + 4x - 2 > 0\}$ a $B = \{x \mid |x + 1| \leq 3\}$. Sjednocením A a B je množina:

| | |
|---|---|
| A | $A \cup B = (-\infty, -2 - \sqrt{6}) \cup \langle -4, +\infty)$ |
| B | $A \cup B = (-2 + \sqrt{6}, 2)$ |
| C | $A \cup B = (-2 - \sqrt{6}, -4)$ |
| D | $A \cup B = \mathbb{R}$ |
| E | Žádná z ostatních možností není správná. |

Řešení: A.

1.3 Racionální lomené výrazy v rovnicích a nerovnicích

Základní příklady

Příklad 1.26. Řešte rovnici $6x + \frac{1}{x^2 - 9} = \frac{1}{x^2 - 9} + 18$.

| A | B | C | D | E |
|-------------|---------|----------|-------------|---------|
| \emptyset | $\{0\}$ | $\{-3\}$ | $\{-3, 3\}$ | $\{3\}$ |

Řešení: A.

Příklad 1.27. Která z následujících nerovnic má jako řešení všechna reálná čísla?

| A | B | C | D | E |
|-----------------------------|---|------------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| $\frac{-x^2}{x^2-4} \leq 0$ | $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2 \geq 0$ | $\frac{x^2-4}{x^2-4} \geq 0$ | $\frac{x^2+1}{x^2} \geq 0$ | $\frac{-x^2}{x^2+4} \leq 0$ |

Řešení: E.

Příklad 1.28. Řešte nerovnici $\frac{3x+4}{x+1} \leq 2$.

| A | B | C | D | E |
|-----------------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------------------|--|
| $x \in \langle -\frac{4}{3}, -1)$ | $x \in \langle -2, -1)$ | $x \in \langle -2, -1)$ | $x \in \langle -\frac{4}{3}, -1)$ | $x \in$ $(-\infty, -2) \cup$ $(-1, +\infty)$ |

Řešení: C.

Příklad 1.29. Najděte nejmenší celočíselné řešení nerovnice $\frac{(\sqrt{x})^2 - 2 - x^2}{(x+9)(x^2+1)} \leq 0$.

| A | B | C | D | E |
|----|----|---|---|---|
| -9 | -8 | 0 | 9 | 1 |

Řešení: C.

Příklad 1.30. Určete množinu řešení nerovnice $\frac{(x-1)^2(x+7)(x+3)^3}{x^2+6x+9} \geq 0$.

| A | B | C | D | E |
|--|------------------------------------|--------------------------|--|----------|
| $\langle -7, -3 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$ | $(-\infty, -7) \cup (-3, +\infty)$ | $\langle -7, -3 \rangle$ | $(-\infty, 3) \cup \langle 7, +\infty \rangle$ | $(3, 7)$ |

Řešení: B.

Doplňující příklady

Příklad 1.31. Řešte rovnici $\frac{3x+4}{x+1} = 2$.

| A | B | C | D | E |
|----------|------------------------|--------------------|----------|---------|
| $\{-1\}$ | $\{-1, -\frac{4}{3}\}$ | $\{-\frac{4}{3}\}$ | $\{-2\}$ | $\{2\}$ |

Řešení: D.

Příklad 1.32. Řešte rovnici $\frac{(x^2-9)(x^2-16)}{(x-3)(x+4)} = 0$.

| A | B | C | D | E |
|--------------------|------------|--------------|-------------|-------------|
| $\{-4, -3, 3, 4\}$ | $\{3, 4\}$ | $\{-3, -4\}$ | $\{-3, 4\}$ | $\{-4, 3\}$ |

Řešení: D.

Příklad 1.33. Určete množinu řešení nerovnice $\frac{7}{|x|+5} < 1$.

| A | B | C | D | E |
|--------------|-----------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------|
| \mathbb{R} | $(-2, 2)$ | $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ | $(-\infty, -5) \cup (2, +\infty)$ | $(-5, 2)$ |

Řešení: C.

Příklad 1.34. Řešte nerovnici $\left| \frac{2x+1}{x-3} + 1 \right| \leq 1$.

| A | B | C | D | E |
|---|---|------------------------------------|---|---|
| $x \in \langle -\frac{1}{2}, 3 \rangle$ | $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{4} \rangle \cup (3, +\infty)$ | $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ | $x \in \langle -\frac{1}{2}, 3 \rangle \cup (3, +\infty)$ | $x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{4} \rangle$ |

Řešení: E.

Příklad 1.35. Řešte nerovnici $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8} \leq 1$.

| A | B | C | D | E |
|-----------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| $x \in (-4, 3)$ | $x \in (-3, 4)$ | $x \in (-\infty, -4)$ | $x \in (-4, +\infty)$ | $x \in (-4, 2) \cup (2, +\infty)$ |

Řešení: E.

Příklad 1.36. Určete množinu řešení nerovnice $\frac{15 + 2x - x^2}{(x - 5)(a - x)} \leq 0$, pokud $-3 < a < 5$.

| A | B | C | D | E |
|-------------------------|-------------------------|--|--|---|
| $\langle -3, a \rangle$ | $\langle -3, a \rangle$ | $(-\infty, -3) \cup$ $(5, +\infty)$ | $(-\infty, -3) \cup$ $\langle 5, +\infty \rangle$ | $(-\infty, -3) \cup$ $(a, 5) \cup$ $(5, +\infty)$ |

Řešení: B.