

2 Elementární funkce

2.1 Polynomy (mnohočleny)

Příklad 2.1. Zjistěte, které z následujících čísel je kořenem polynomu $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

A	B	C	D	E
2	1	0	-1	-2

Příklad 2.2. Určete podíl polynomů $x^4 - x^2 + x + 1$ a $x^3 - x^2 + 1$.

A	B	C	D	E
$x^2 - 1$	x	$x - 1$	$x + 1$	$x^2 + 1$

Příklad 2.3. Určete zbytek při dělení mnohočlenu $x^3 + 5x^2 - x - 4$ a dvojčlenu $x - 1$.

A	B	C	D	E
0	1	2	-1	-2

Příklad 2.4. Určete množinu reálných řešení rovnice $x^4 - x^3 - 27x + 27 = 0$.

A	B	C	D	E
$\{-3, -1\}$	$\{-3, 1\}$	$\{-1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 27\}$

.....
Doplňující příklady **2.5–2.9** jsou k dispozici na stránce <https://bit.ly/pt-fji>.

2.2 Goniometrické funkce

Příklad 2.10. Udělejte goniometrickou rozcvičku – zkuste doplnit z paměti následující výrazy:

a) $\sin \pi = ?$ b) $\sin 2\pi = ?$ c) $\cos \frac{3}{2}\pi = ?$ d) $\cos 2\pi = ?$

Příklad 2.11. S využitím jednotkové kružnice zjistěte, zda existuje $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí:

a) $\cos x = 0$ a zároveň $\sin x = -1$;

b) $\cos x = -1$ a zároveň $\sin x = 1$.

Příklad 2.12. Vypočítejte:

a) $2 \cos \frac{1}{2}\pi - 5 \sin \pi + 6 \cos \pi$;

b) $3 \cos \frac{1}{4}\pi - 3 \sin \frac{1}{4}\pi + 2 \cos \frac{1}{3}\pi - \sin \frac{1}{6}\pi$;

c) $2 \cos \frac{39}{18}\pi - \frac{1}{2} \sin(-7\pi) + \sqrt{2} \cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right) + 2 \sin \frac{35}{6}\pi$.

Příklad 2.13. Ve kterých intervalech jsou funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ zároveň:

a) rostoucí;

b) klesající?

Příklad 2.14. Určete všechna $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$, pro která platí:

a) $\sin x = \cos x$;

b) $\sin x = -\cos x$.

Příklad 2.15. Zjednodušte výraz $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

A	B	C	D	E
$-2 \sin^2 \alpha$	1	$2 \cos^2 \alpha$	$2 \sin^2 \alpha$	0

Příklad 2.16. Řešte rovnici $2 \sin x = -1$.

A	$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
B	$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
C	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
D	$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
E	$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Příklad 2.17. Zapište množinu všech $x \in \langle -2\pi, 2\pi \rangle$, pro která platí:

a) $\sin x > 0$ a zároveň $\cos x \leq 0$;

b) $\sin x < 0$ a zároveň $\cos x < 0$.

Příklad 2.18. Pro uvedené výrazy zjistěte, jestli jde o číslo kladné, záporné nebo rovné nule:

a) $\cos \frac{1}{3}\pi \cdot \cos \frac{2}{3}\pi \cdot \cos \left(-\frac{2}{3}\pi\right)$;

b) $\sin \frac{1}{3}\pi \cdot \cos \frac{11}{3}\pi \cdot \cos \left(-\frac{1}{2}\pi\right)$.

Příklad 2.19. Řešte rovnici $|\cos x| = \cos x + 2 \sin x$.

A	$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{2\pi n\}$
B	$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\pi n\}$
C	$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\pi n, -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\}$
D	$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{\pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n\}$
E	$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\}$

Příklad 2.20. Řešte nerovnici $2 \cos \pi x > 1$.

A	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$
B	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{8} + 2k, \frac{1}{6} + 2k\right)$
C	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{3} + 2k, \frac{7}{3} + 2k\right)$
D	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{3} + k, \frac{1}{3} + k\right)$
E	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{3} + 2k, \frac{1}{3} + 2k\right)$

.....
Doplňující příklady **2.21–2.35** jsou k dispozici na stránce <https://bit.ly/pt-fjfi>.

2.3 Exponenciální a logaritmická funkce

Příklad 2.36. Načrtněte graf exponenciální funkce $y = 3^x$. Pak z něho určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

- a) $3^x = 1$; b) $3^x < 1$; c) $3^x > 1$; d) $3^x > 0$.

Příklad 2.37. Načrtněte graf exponenciální funkce $y = 0,3^x$. Pak z něho určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která platí:

- a) $0,3^x = 1$; b) $0,3^x < 1$; c) $0,3^x \geq 1$; d) $0,3^x > 0$.

Příklad 2.38. Řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$:

- a) $10^{x-1} = 1$; c) $0,01^x = 1000$; e) $\sqrt{100^x} = 10^{-1}$;
 b) $10^x = 0,001$; d) $0,01^x = \sqrt[3]{10}$; f) $10^{x-2} = 0,1$.

Příklad 2.39. Řešte rovnici $3^{x-5} = 9^{-2x}$.

A	B	C	D	E
$x = \frac{5}{3}$	$x = 1$	$x = \frac{5}{4}$	$x = 0$	$x = -1$

Příklad 2.40. Řešte rovnice $5^{\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}} = 1$ i $\left(\frac{2}{3}\right)^{(x^2-4)(x-1)} = 1$ a запиšte množinu jejich společných kořenů.

A	B	C	D	E
$S = \{-2, 2, 1\}$	$S = \{2, 1\}$	$S = \{-2, 1\}$	$S = \{-2, 2\}$	$S = \{2\}$

Příklad 2.41. Vypočítejte:

- a) $\log_3 3$; c) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$; e) $\log_3 \frac{1}{9}$;
 b) $\log_3 1$; d) $\log_3 27$; f) $\log_3 3\sqrt{3}$.

Příklad 2.42. Která z následujících rovností není pravdivá?

A	B	C	D	E
$\log_2 16 = 4$	$\log_2 \frac{1}{16} = -4$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = \frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

Příklad 2.43. Vypočítejte $5^{\log_5 7} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} + \log_7 1$.

A	B	C	D	E
6	7	8	$7\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{3}$

Příklad 2.44. Spočtete $\log_5 49 + 2 \log_5 \frac{5}{7}$.

A	B	C	D	E
2	1	0	4	25

Příklad 2.45. Řešte rovnici $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$.

A	B	C	D	E
\emptyset	$x = -16$	$x = \frac{1}{16}$	$x \in \left\{\frac{1}{16}, 16\right\}$	$x = 16$

Příklad 2.46. Řešte rovnici $\log_a \log_b \log_c x = 0$.

A	B	C	D	E
$x = c^b$	$x = a^{bc}$	$x = b^c$	$x = a^c$	$x = abc$

Příklad 2.47. Řešte nerovnici $(\frac{1}{3})^x > \frac{1}{3}$.

A	B	C	D	E
$x \in (1, +\infty)$	$x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$	$x \in (-\infty, \frac{1}{3})$	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (-\infty, 1)$

Příklad 2.48. Řešte nerovnici $\log_8(3x - 10) < \frac{1}{3}$.

A	B	C	D	E
$x \in (0, 3\frac{1}{3})$	$x \in (-\infty, 3\frac{1}{3})$	$x \in (4, +\infty)$	$x \in (-\infty, 4)$	$x \in (3\frac{1}{3}, 4)$

.....
Doplňující příklady **2.49–2.78** jsou k dispozici na stránce <https://bit.ly/pt-fjfi>.