2 Elementární funkce

2.1 Polynomy (mnohočleny)

Základní příklady

Příklad 2.1. Zjistěte, které z následujících čísel je kořenem polynomu $x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

A	B	C	D	E
2	1	0	-1	-2

Řešení: E.

Postup řešení: Samozřejmě lze v tomto případě dosadit a zjistit, co je kořen. Ale je dobré i ukázat obecný postup a připomenout pojmy spjaté s polynomy.

Připomeňme si, že číslo c (buď reálné nebo komplexní) nazýváme **kořenem polynomu** $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{C}$, $a_n \neq 0$), pokud $P_n(c) = 0$.

Pak můžeme tento polynom přepsat ve tvaru součinu $P_n(x) = (x-c)Q_{n-1}(x)$. V tomto zápisu závorka $(x - c)$ je tzv. **kořenový činitel** příslušný ke kořenu c, polynom $Q_{n-1}(x)$ má stupeň o 1 menší než $P_n(x)$. V případě k-násobného kořene c můžeme používat rozklad $P_n(x) = (x - c)^k Q_{n-k}(x)$ $(Q_{n-k}(c) \neq 0)$.

Navíc pokud $P_n(x)$ je polynom s celočíselnými koeficienty, celočíselným kořenem takového polynomu může být pouze dělitel absolutního členu a_0.

Všechna čísla ± 1, ± 2 jsou dělitele čísla $a_0 = 2$, proto jsou kandidáty na kořen. Protože $a_0 \neq 0$, číslo 0 kořen není. Dosazením do polynomu uvidíme, že jediná správná možnost je E. □

Příklad 2.2. Určete podíl polynomů $x^4 - x^2 + x + 1$ a $x^3 - x^2 + 1$.

A	B	C	D	E
$x^2 - 1$	x	$x - 1$	$x + 1$	$x^2 + 1$

Řešení: D.

Příklad 2.3. Určete zbytek při dělení mnohočlenu $x^3 + 5x^2 - x - 4$ a dvojčlenu $x - 1$.

A	B	C	D	E
0	1	2	-1	-2

Řešení: B.

Nápověda: Kromě standardního dělení polynomů zde lze použít Hornerovo schéma. Jiný vhodný způsob je dosazení $x = 1$ do polynomu. □

Příklad 2.4. Určete množinu reálných řešení rovnice $x^4 - x^3 - 27x + 27 = 0$.

A	B	C	D	E
$\{-3, -1\}$	$\{-3, 1\}$	$\{-1, 3\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 27\}$

Řešení: D.

Postup řešení: Jeden z rychlejších způsobů v tomto případě je rozklad mnohočlenu v levé části rovnice:

$$x^4 - x^3 - 27x + 27 = x^3(x - 1) - 27(x - 1) = (x - 1)(x^3 - 27) = (x - 1)(x - 3)(x^2 + 3x + 9).$$

Kvadratický polynom z poslední závorky v $\mathbb{R}$ je ireducibilní, tj. nemá reálné kořeny. Proto do množiny reálných řešení rovnice patří pouze čísla 1 a 3. □

. . . .

Doplňující příklady

Příklad 2.5. Najděte součet kořenů polynomu $x^3 + 12x^2 + 44x + 48$.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
3	2	-2	-6	-12

Řešení: E.

Příklad 2.6. Rozložte polynom $2x^7 - 3x^6 - 8x^5 + 6x^4 + 10x^3 + x^2 + 4x + 4$ na součin kořenových činitelů v oboru reálných čísel.

A	$(x-1)^2(x+2)^3(2x^2-x+1)$
B	$(x+1)^2(x-2)^3(2x^2-x+1)$
C	$(x+1)^3(x-2)^2(2x^2-x+1)$
D	$(x+1)^3(x-2)^2(x-1)^2$
E	Žádná z ostatních možností není správná.

Řešení: C.

Příklad 2.7. Nalezněte největší řešení rovnice $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$.

Řešení: -1.

Příklad 2.8. Jaký je součin všech kořenů rovnice $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$?

Řešení: -8.

Příklad 2.9. Řešte rovnici $x^4 + (x + 4)^4 = 82$ a určete její největší kořen.

Řešení: -1.

2.2 Goniometrické funkce

Základní příklady

Příklad 2.10. Udělejte goniometrickou rozcvičku – zkuste doplnit zpaměti následující výrazy:

a) $\sin\pi =$? b) $\sin 2\pi =$? c) $\cos\frac{3}{2}\pi =$? d) $\cos 2\pi =$?

Řešení: a) 0; b) 0; c) 0; d) 1.

Příklad 2.11. S využitím jednotkové kružnice zjistěte, zda existuje $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí:

a) $\cos x = 0$ a zároveň $\sin x = -1$;

b) $\cos x = -1$ a zároveň $\sin x = 1$.

Řešení: a) ano, například $x = \frac{3}{2}\pi$; b) neexistuje.

Příklad 2.12. Vypočítejte:

a) $2\cos\frac{1}{2}\pi - 5\sin\pi + 6\cos\pi$;

b) $3\cos\frac{1}{4}\pi - 3\sin\frac{1}{4}\pi + 2\cos\frac{1}{3}\pi - \sin\frac{1}{6}\pi$;

c) $2\cos\frac{39}{18}\pi - \frac{1}{2}\sin\left(-7\pi\right) + \sqrt{2}\cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right) + 2\sin\frac{35}{6}\pi$.

Řešení: a) -6; b) $\frac{1}{2}$; c) $\sqrt{3}$.

Příklad 2.13. Ve kterých intervalech jsou funkce $y = \sin x$ a $y = \cos x$ zároveň:

a) rostoucí;

b) klesající?

Řešení: a) ve všech intervalech $\left\langle\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right\rangle$, kde $k \in \mathbb{Z}$; b) ve všech intervalech $\left\langle\frac{1}{2}\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right\rangle$, kde $k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 2.14. Určete všechna $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$, pro která platí:

a) $\sin x = \cos x$;

b) $\sin x = -\cos x$.

Řešení: a) $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{4}\pi$; b) $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$.

Příklad 2.15. Zjednodušte výraz $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
$-2\sin^2\alpha$	1	$2\cos^2\alpha$	$2\sin^2\alpha$	0

Řešení: E.

Příklad 2.16. Řešte rovnici $2\sin x = -1$.

A	$x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
B	$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
C	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
D	$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$
E	$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Řešení: E.

Příklad 2.17. Zapište množinu všech $x \in \langle -2\pi, 2\pi\rangle$, pro která platí:

a) $\sin x > 0$ a zároveň $\cos x \leq 0$;

b) $\sin x < 0$ a zároveň $\cos x < 0$.

Řešení: a) $\left\langle -\frac{3}{2}\pi, -\pi\right) \cup \left\langle\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$; b) $\left(-\pi, -\frac{1}{2}\pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Příklad 2.18. Pro uvedené výrazy zjistěte, jestli jde o číslo kladné, záporné nebo rovné nule:

a) $\cos\frac{1}{3}\pi \cdot \cos\frac{2}{3}\pi \cdot \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$;

b) $\sin \frac{1}{3}\pi \cdot \cos \frac{111}{3}\pi \cdot \cos\left(-\frac{1}{2}\pi\right)$.

Řešení: a) kladné číslo; b) nula.

Příklad 2.19. Řešte rovnici $|\cos x| = \cos x + 2\sin x$.

A	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{2\pi n\}$
B	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{\pi n\}$
C	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\pi n, -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right\}$
D	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n\right\}$
E	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right\}$

Řešení: E.

Příklad 2.20. Řešte nerovnici $2\cos \pi x > 1$.

A	$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$
B	$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{8} + 2k, \frac{1}{6} + 2k\right)$
C	$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{3} + 2k, \frac{7}{3} + 2k\right)$
D	$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{3} + k, \frac{1}{3} + k\right)$
E	$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{1}{3} + 2k, \frac{1}{3} + 2k\right)$

Řešení: E.

. . . .

Doplňující příklady

Příklad 2.21. Zjednodušte výraz $\sin(\pi - 2\alpha) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
$\sin 2\alpha$	1	$3\cos 2\alpha$	3	0

Řešení: E.

Příklad 2.22. Zjednodušte výraz $\cos^4 \frac{\alpha}{2} - \sin^4 \frac{\alpha}{2}$.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \frac{\alpha}{4}$	$\cos 2\alpha$	1

Řešení: B.

Příklad 2.23. Zjednodušte výraz $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta}$.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$	$\sin\alpha\sin\beta$	$\cos\alpha\cos\beta$	$\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta$

Řešení: B.

Příklad 2.24. Zjednodušte výraz $16\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
0,5	−0,5	2	−2	0

Řešení: C.

Příklad 2.25. Zjednodušte výraz $\sin\frac{3\pi}{14} - \sin\frac{\pi}{14} - \sin\frac{5\pi}{14}$.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	−1

Řešení: A.

Příklad 2.26. Která z následujících funkcí není sudá ani lichá?

A	$f(x) = \cos 3x \operatorname{cotg} 4x$
B	$f(x) = \dfrac{2 + 3\sin^2 5x}{6 \operatorname{tg} x}$
C	$f(x) = 5\sqrt{\cos x} + x^4$
D	$f(x) = \dfrac{x^2 + \sin 2x}{\sin 2x - x^3}$
E	$f(x) = \sin 6x \operatorname{tg} x + x^2$

Řešení: D.

Příklad 2.27. Řešte rovnici $2\cos 2x = -\sqrt{2}$.

A	$K = \emptyset$
B	$K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\pm\frac{3\pi}{8} + \pi n\right\}$
C	$K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\pm\frac{\pi}{8} + \pi n\right\}$
D	$K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right\}$
E	$K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\pm\frac{\pi}{4} + \pi n\right\}$

Řešení: B.

Příklad 2.28. Najděte kořen rovnice $\sin 2x - 4\cos x = 0$, který patří do intervalu $\langle 2\pi, 3\pi\rangle$.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
$x = \frac{7\pi}{3}$	$x = \frac{5\pi}{2}$	$x = \frac{9\pi}{4}$	$x = \frac{13\pi}{6}$	$x = \frac{7\pi}{4}$

Řešení: B.

Příklad 2.29. Řešte rovnici $\cos(\cos x) = 1$.

A	$\emptyset$
B	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$
C	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{\pm \arccos(2\pi n) + 2\pi n\}$
D	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{2\pi n\}$
E	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{\pm\pi + 2\pi n\}$

Řešení: B.

Příklad 2.30. Řešte rovnici $(\operatorname{cotg} x)^{100} = 1$.

A	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \in \mathbb{Z}$
B	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
C	$x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
D	0
E	$x = \operatorname{arccotg} 100 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Řešení: C.

Příklad 2.31. Řešte rovnici $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

A	$K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \pi n$
B	$K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{6} + \pi n\right\}$
C	$K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{-\frac{\pi}{3} + \pi n\right\}$
D	$K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right\}$
E	$K = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{4} + \pi n\right\}$

Řešení: A.

Příklad 2.32. Řešte rovnici $\sin x + \sin|x| = 0$.

A	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{\pi n\}$
B	$x = 0$
C	$x \in (-\infty, 0\rangle$
D	$x \in (-\infty, 0\rangle \cup \{\pi n \mid n \in \mathbb{N}\}$
E	$x \in (-\infty, 0\rangle \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$

Řešení: D.

Příklad 2.33. Najděte délku každé z úseček číselné osy, které zobrazují řešení nerovnice $2\sin x \leq 1$.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$

Řešení: C.

Příklad 2.34. Řešte nerovnici $-2\sin 2x < \sqrt{2}$.

A	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{8} + \pi n, \frac{3\pi}{8} + \pi n\right)$
B	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{3\pi}{4} + \pi n\right)$
C	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$
D	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{8} + 2\pi n, \frac{5\pi}{8} + 2\pi n\right)$
E	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{8} + \pi n, \frac{5\pi}{8} + \pi n\right)$

Řešení: E.

Příklad 2.35. Řešte nerovnici $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>1$.

A	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{4}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$
B	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$
C	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$
D	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$
E	$x \in \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\pi n, \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$

Řešení: E.

2.3 Exponenciální a logaritmická funkce

Základní příklady

Příklad 2.36. Načrtněte graf exponenciální funkce $y=3^x$. Pak z něho určete všechna $x\in\mathbb{R}$, pro která platí:

a) $3^x=1$; b) $3^x<1$; c) $3^x>1$; d) $3^x>0$.

Řešení: a) $x=0$; b) $x\in(-\infty,0)$; c) $x\in(0,+\infty)$; d) $x\in\mathbb{R}$.

Příklad 2.37. Načrtněte graf exponenciální funkce $y=0{,}3^x$. Pak z něho určete všechna $x\in\mathbb{R}$, pro která platí:

a) $0{,}3^x=1$; b) $0{,}3^x<1$; c) $0{,}3^x\geq 1$; d) $0{,}3^x>0$.

Řešení: a) $x=0$; b) $x\in(0,+\infty)$; c) $x\in(-\infty,0\rangle$; d) $x\in\mathbb{R}$.

Příklad 2.38. Řešte rovnice s neznámou $x\in\mathbb{R}$:

a) $10^{x-1}=1$; c) $0{,}01^x=1000$; e) $\sqrt{100^x}=10^{-1}$;
b) $10^x=0{,}001$; d) $0{,}01^x=\sqrt[3]{10}$; f) $10^{x-2}=0{,}1$.

Řešení: a) $x=1$; b) $x=-3$; c) $x=-1{,}5$; d) $x=-\frac{1}{6}$; e) $x=-1$; f) $x=1$.

Příklad 2.39. Řešte rovnici $3^{x-5}=9^{-2x}$.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
$x=\frac{5}{3}$	$x=1$	$x=\frac{5}{4}$	$x=0$	$x=-1$

Řešení: B.

Příklad 2.40. Řešte rovnice $5^{\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}}=1$ i $\left(\frac{2}{3}\right)^{\left(x^2-4\right)(x-1)}=1$ a zapište množinu jejich společných kořenů.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
$S=\{-2,2,1\}$	$S=\{2,1\}$	$S=\{-2,1\}$	$S=\{-2,2\}$	$S=\{2\}$

Řešení: E.

Příklad 2.41. Vypočítejte:

a) $\log_3 3$;
b) $\log_3 1$;
c) $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$;
d) $\log_3 27$;
e) $\log_3 \frac{1}{9}$;
f) $\log_3 3\sqrt{3}$.

Řešení: a) 1; b) 0; c) −0,5; d) 3; e) −2; f) 1,5.

Příklad 2.42. Která z následujících rovností není pravdivá?

A	B	C	D	E
$\log_2 16 = 4$	$\log_2 \frac{1}{16} = -4$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = \frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

Řešení: D.

Příklad 2.43. Vypočítejte $5^{\log_5 7} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} + \log_7 1$.

A	B	C	D	E
6	7	8	$7\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{3}$

Řešení: C.

Příklad 2.44. Spočtěte $\log_5 49 + 2\log_5 \frac{5}{7}$.

A	B	C	D	E
2	1	0	4	25

Řešení: A.

Příklad 2.45. Řešte rovnici $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$.

A	B	C	D	E
$\emptyset$	$x = -16$	$x = \frac{1}{16}$	$x \in \left\{\frac{1}{16}, 16\right\}$	$x = 16$

Řešení: E.

Příklad 2.46. Řešte rovnici $\log_a \log_b \log_c x = 0$.

A	B	C	D	E
$x = c^b$	$x = a^{bc}$	$x = b^c$	$x = a^c$	$x = abc$

Řešení: A.

Příklad 2.47. Řešte nerovnici $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{3}$.

A	B	C	D	E
$x \in (1, +\infty)$	$x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$	$x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (-\infty, 1)$

Řešení: E.

Příklad 2.48. Řešte nerovnici $\log_8 (3x - 10) < \frac{1}{3}$.

A	B	C	D	E
$x \in \left(0, 3\frac{1}{3}\right)$	$x \in \left(-\infty, 3\frac{1}{3}\right)$	$x \in (4, +\infty)$	$x \in (-\infty, 4)$	$x \in \left(3\frac{1}{3}, 4\right)$

Řešení: E.

. . . .

Doplňující příklady

Příklad 2.49. Řešte rovnici $0{,}2^{3x-1} = \sqrt{125}$.

A	B	C	D	E
$x = 5$	$x = 3$	$x = 1$	$x = -\frac{1}{6}$	$x = 0{,}4$

Řešení: D.

Příklad 2.50. Určete množinu řešení rovnice $(x^2 + x + 1)^{x-3} = 1$.

A	B	C	D	E
$K = \{3\}$	$K = \{-1, 0\}$	$K = \{-1, 0, 3\}$	$K = \{2\}$	$K = \{-2\}$

Řešení: C.

Příklad 2.51. Řešte rovnice $6^{x+1} = 3^{x+1}$ i $2^{x-5} = 8^{x-5}$ a určete součet jejich kořenů.

A	B	C	D	E
4	-4	5	-5	53

Řešení: A.

Příklad 2.52. Řešte rovnice $2^x \cdot 3^{x-1} = 72$ i $\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{7^x} = 196$ a určete součet jejich kořenů.

A	B	C	D	E
8	7	6	5	4

Řešení: B.

Příklad 2.53. Řešte rovnici $4^{x+2} - 4^{x+1} + 4^x = 39$.

A	B	C	D	E
$x = \sqrt[4]{3}$	$x = \sqrt[3]{4}$	$x = \log_3 4$	$x = \log_4 3$	$\emptyset$

Řešení: D.

Příklad 2.54. Určete počet kořenů rovnice $3^{2x^2} - 12 \cdot 3^{x^2} + 27 = 0$.

A	B	C	D	E
0	1	2	3	4

Řešení: E.

Příklad 2.55. Rozhodněte, které tvrzení o řešeních rovnice $9^{x-\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}-x} = \frac{10}{3}$ je pravdivé.

A	B	C	D	E
Součet všech řešení je -1.	Rovnice nemá řešení.	Rovnice má dvě nezáporná řešení.	Součin všech řešení je 9.	Žádná z ostatních možností není správná.

Řešení: C.

Příklad 2.56. Vypočítejte $8^{\log_2 3} + 9^{\log_3 4}$.

A	B	C	D	E
33	7	14	43	60

Řešení: D.

Příklad 2.57. Zjednodušte výraz $\log \operatorname{tg} 1° + \log \operatorname{tg} 2° + \log \operatorname{tg} 3° + \cdots + \log \operatorname{tg} 88° + \log \operatorname{tg} 89°$.

A	B	C	D	E
89!	0,1	10	1	0

Řešení: E.

Příklad 2.58. Spočtěte $7^{\log_2 3} - 3^{\log_2 7}$.

A	B	C	D	E
0	$\frac{7}{3}$	1	-1	2

Řešení: A.

Příklad 2.59. Vypočítejte $\log_5 7 \cdot \log_{49} 125$.

A	B	C	D	E
$\frac{1}{6}$	1	6	$\frac{2}{3}$	1,5

Řešení: E.

Příklad 2.60. Vypočítejte $\log_n \log_n \underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\ldots \sqrt[n]{n}}}}_{2024}$.

A	B	C	D	E
2024	-2024	1012	-1012	1

Řešení: B.

Příklad 2.61. Řešte rovnici $\log(x^2 - x) = 1 - \log 5$.

A	B	C	D	E
$\emptyset$	$x \in \{-3, 2\}$	$x \in \{-2, 1\}$	$x \in \{-2, 3\}$	$x \in \{-1, 2\}$

Řešení: E.

Příklad 2.62. Řešte rovnici $5^{2^x} = 7$.

A	B	C	D	E
$x = \log_5 \log_2 7$	$x = \log_2 \log_5 7$	$x = \log_7 \log_5 2$	$x = \log_7 \log_2 5$	$x = \log_2 \log_7 5$

Řešení: B.

Příklad 2.63. Rozhodněte, které tvrzení o řešeních rovnice $\dfrac{\log_3(6x-2)}{\log_3(x-3)} = 2$ je pravdivé.

A	B	C	D	E
Součet všech řešení je 12.	Rovnice má dvě řešení a jejich součin je 10.	Rovnice má jedno řešení.	Rovnice nemá řešení.	Žádná z ostatních možností není správná.

Řešení: C.

Příklad 2.64. Vypočítejte $\log_8 16$.

A	B	C	D	E
8	2	$\frac{3}{4}$	12	$\frac{4}{3}$

Řešení: E.

Příklad 2.65. Řešte nerovnici $2^x < \frac{1}{8}$.

A	B	C	D	E
$x \in (-\infty, -3)$	$x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$	$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$x \in (-3, +\infty)$	$x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Řešení: A.

Příklad 2.66. Která z následujících nerovnic má řešení?

A	B	C	D	E
$7^x < -1$	$7^{\lvert x \rvert} < 0{,}7$	$7^{x^2} < 1$	$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} < 2$	$\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2} > 2$

Řešení: D.

Příklad 2.67. Řešte nerovnici $9^{x+5} > 27^x$.

A	B	C	D	E
$x \in (-\infty, 5)$	$x \in (10, +\infty)$	$x \in (-\infty, 10)$	$x \in (0, 10)$	$x \in \mathbb{R}$

Řešení: C.

Příklad 2.68. Řešte nerovnici $7^x - 7^{\frac{1}{x}} > 0$.

A	B	C	D	E
$x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$	$x \in (-1, 1)$	$x \in (1, +\infty)$	$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$	$x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Řešení: E.

Příklad 2.69. Řešte nerovnici $3^x > 5^x$.

A	B	C	D	E
$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, +\infty)$	$x \in (-\infty, -1)$	$x \in (1, +\infty)$	$x \in \emptyset$

Řešení: A.

Příklad 2.70. Určete množinu řešení nerovnice $2^{x+1} + 2^x < 24$.

A	B	C	D	E
$M = (-3, +\infty)$	$M = (-\infty, -3)$	$M = (3, +\infty)$	$M = (0, 3)$	$M = (-\infty, 3)$

Řešení: E.

Příklad 2.71. Řešte nerovnici $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$.

A	B	C	D	E
$x \in (-6, 8)$	$x \in (2, 4)$	$x \in (1, 2)$	$x \in (-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$	$x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

Řešení: C.

Příklad 2.72. Řešte nerovnici $2^{x^2} > \sin x$.

A	B	C	D	E
$M = \emptyset$	$M = \mathbb{R}$	$M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$M = \{0\}$	$M = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Řešení: B.

Příklad 2.73. Najděte množinu řešení nerovnice $\log_{\sin 1} x > 2 \log_{\sin 1} 7$.

A	B	C	D	E
$M = (49, +\infty)$	$M = (0, 49)$	$M = (14, +\infty)$	$M = (0, 14)$	$M = (-\infty, 49)$

Řešení: B.

Příklad 2.74. Kolik celočíselných řešení má nerovnice $\log_{\frac{1}{2}} (x + 3) \geq -1$?

A	B	C	D	E
0	1	2	3	více než 3

Řešení: C.

Příklad 2.75. Řešte nerovnici $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{5}} (2-x)} < 2$.

A	B	C	D	E
$x \in (-\infty, 2)$	$x \in (-\infty, 0)$	$x \in (0, +\infty)$	$x \in (0, 2)$	$x \in (2, +\infty)$

Řešení: D.

Příklad 2.76. Řešte nerovnici $\log_{\frac{1}{3}} \log_5 x \geq 0$.

A	B	C	D	E
$x \in \left(\frac{1}{3}, 5\right\rangle$	$x \in (1, 5\rangle$	$x \in (0, 1\rangle$	$x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty)$	$x \in (-\infty, 1\rangle \cup \langle 5, +\infty)$

Řešení: B.

Příklad 2.77. Najděte množinu řešení nerovnice $\log_x 5 < 1$.

A	B	C	D	E
$M = (0, 1) \cup (1, +\infty)$	$M = (0, 1) \cup (5, +\infty)$	$M = (0, +\infty)$	$M = (0, 5) \cup (5, +\infty)$	$M = (0, 1) \cup (1,)$

Řešení: B.

Příklad 2.78. Řešte nerovnici $x^x < 1$ pro $x > 0$.

A	**B**	**C**	**D**	**E**
$x \in (1, +\infty)$	$x \in (0, +\infty)$	$x \in (0, 1)$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$	$x = 1$

Řešení: C.