

### 3 Zkrácené psaní součtu a součinu

**Hlavní cíl:** Pochopit, co zkrácený zápis znamená, a znát součet aritmetické a geometrické posloupnosti.

#### 3.1 Příklady na sumy

**Příklad 3.1.** Vypočítejte

$$\sum_{k=-1}^2 k^3, \quad \sum_{k=1}^3 4, \quad \sum_{j=-1}^1 (2j-1), \quad \sum_{\ell=0}^3 \frac{\ell}{2}$$

**Věta 3.1.** Zřejmě platí

$$\sum_{k=m}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k,$$

$$\sum_{k=m}^n ca_k = c \sum_{k=m}^n a_k, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Příklad 3.2.** Posouvejte index a zachovejte rovnost, např.

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=5}^? a_?,$$

$$\sum_{k=5}^{10} \frac{2k}{k-1} = \sum_{k=?}^7 ??,$$

$$\sum_{k=5}^{10} (3k+1)^2 = \sum_{k=?}^? (3k-5)^2, \text{ atd.}$$

**Příklad 3.3.** Zjednodušte

$$\sum_{k=1}^{2n} k + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k.$$

**Příklad 3.4. (z přednášky)** Sečtěte

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{(1+n)n}{2} = \frac{(1.\text{člen} + \text{poslední člen}) \cdot \text{počet členů}}{2}.$$

**Příklad 3.5.** Sečtěte aritmetickou posloupnost s diferencí  $d$

$$\sum_{k=0}^n (a + kd) = \frac{(1.\text{člen} + \text{poslední člen}) \cdot \text{počet členů}}{2}.$$

**Příklad 3.6.** Sečtěte

$$\sum_{k=1}^{100} (k-10), \quad \sum_{j=0}^5 (2j-1), \quad \sum_{\ell=2}^{11} (-5\ell+7).$$

**Příklad 3.7. (z přednášky)** Sečtěte

$$\sum_{k=1}^n k^2.$$

**Příklad 3.8.** (z přednášky) Sečtěte pro  $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1.\text{člen} \cdot \frac{q^{\text{počet členů}} - 1}{q - 1}.$$

**Příklad 3.9.** Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^{10} 2^k, \quad \sum_{k=1}^5 2^{2k}, \quad \sum_{j=0}^n 3 \cdot \frac{4^j}{5^{j+1}}.$$

**Příklad 3.10.** Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k.$$

**Příklad 3.11.** Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

**Příklad 3.12.** (z přednášky) Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$$

## 3.2 Příklady na produkty

**Věta 3.2.** Zřejmě platí

$$\prod_{k=m}^n (a_k b_k) = \left( \prod_{k=m}^n a_k \right) \cdot \left( \prod_{k=m}^n b_k \right),$$

$$\prod_{k=m}^n c a_k = c^{n-m+1} \prod_{k=m}^n a_k, \quad c \in \mathbb{R}.$$

**Příklad 3.13.** Vypočítejte

$$\prod_{k=1}^5 2, \quad \prod_{j=2}^5 j^2$$

**Příklad 3.14.** Vypočítejte

$$\frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\prod_{k=2}^{n+1} a_k}$$

pro  $a_k \neq 0$ .

**Příklad 3.15.** Vypočítejte

$$\prod_{k=1}^n \left( 1 + \frac{1}{k} \right).$$

**Příklad 3.16.** Vypočítejte

$$\prod_{k=0}^n (3 \cdot 2^k).$$

.....  
Doplňující příklady **3.17–3.27** jsou k dispozici na stránce <https://bit.ly/pt-fjfi>.