

3 Zkrácené psaní součtu a součinu

Hlavní cíl: Pochopit, co zkrácený zápis znamená, a znát součet aritmetické a geometrické posloupnosti.

3.1 Příklady na sumy

Posloupnost je funkce s definičním oborem \mathbb{N} . Budeme uvažovat reálné posloupnosti, tj. funkce: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. U posloupností je zvykem proměnnou nazývat index a psát ji do indexu, tj. $a_n = a(n)$.

Definice 3.1. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sum_{k=m}^n a_k = \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n & \text{pro } n \geq m, \\ 0 & \text{pro } n < m. \end{cases}$$

Symbol k se nazývá **sčítací index** (obvykle volíme písmenka i, j, k, ℓ), m je **dolní mez** sumy, n je **horní mez**.

Příklad 3.1. Vypočítejte

$$\sum_{k=-1}^2 k^3, \quad \sum_{k=1}^3 4, \quad \sum_{j=-1}^1 (2j-1), \quad \sum_{\ell=0}^3 \frac{\ell}{2}$$

Věta 3.1. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n (a_k + b_k) &= \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n b_k, \\ \sum_{k=m}^n ca_k &= c \sum_{k=m}^n a_k, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Příklad 3.2. Posouvejte index a zachovejte rovnost, např.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=5}^? a_?, \\ \sum_{k=5}^{10} \frac{2k}{k-1} &= \sum_{k=?}^7 ??, \\ \sum_{k=5}^{10} (3k+1)^2 &= \sum_{k=?}^? (3k-5)^2, \text{ atd.} \end{aligned}$$

Příklad 3.3. Zjednodušte

$$\sum_{k=1}^{2n} k + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k.$$

Příklad 3.4. Sečtěte

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{(1+n)n}{2} = \frac{(1.\text{člen} + \text{poslední člen}) \cdot \text{počet členů}}{2}.$$

Příklad 3.5. Sečtěte aritmetickou posloupnost s diferencí d

$$\sum_{k=0}^n (a + kd) = \frac{(1.\text{člen} + \text{poslední člen}) \cdot \text{počet členů}}{2}.$$

Příklad 3.6. Sečtěte

$$\sum_{k=1}^{100} (k - 10), \quad \sum_{j=0}^5 (2j - 1), \quad \sum_{\ell=2}^{11} (-5\ell + 7).$$

Příklad 3.7. Sečtěte

$$\sum_{k=1}^n k^2.$$

Příklad 3.8. Sečtěte pro $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 1.\text{člen} \cdot \frac{q^{\text{počet členů}} - 1}{q - 1}.$$

Příklad 3.9. Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^{10} 2^k, \quad \sum_{k=1}^5 2^{2k}, \quad \sum_{j=0}^n 3 \cdot \frac{4^j}{5^{j+1}}.$$

Příklad 3.10. Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k.$$

Příklad 3.11. Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}.$$

Příklad 3.12. Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$$

3.2 Příklady na produkty

Definice 3.2. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\prod_{k=m}^n a_k = \begin{cases} a_m a_{m+1} \cdots a_n & \text{pro } n \geq m, \\ 1 & \text{pro } n < m. \end{cases}$$

Věta 3.2. Zřejmě platí

$$\prod_{k=m}^n (a_k b_k) = \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=m}^n b_k \right),$$

$$\prod_{k=m}^n c a_k = c^{n-m+1} \prod_{k=m}^n a_k, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Definice 3.3. Faktoriál z čísla $n = 0, 1, 2, \dots$ definujeme jako

$$n! = \prod_{k=1}^n k.$$

Příklad 3.13. Vypočítejte

$$\prod_{k=1}^5 2, \quad \prod_{j=2}^5 j^2$$

Příklad 3.14. Vypočítejte

$$\frac{\prod_{k=1}^n a_k}{\prod_{k=2}^{n+1} a_k}$$

pro $a_k \neq 0$.

Příklad 3.15. Vypočítejte

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Příklad 3.16. Vypočítejte

$$\prod_{k=0}^n (3 \cdot 2^k).$$

3.3 Příklady k samostatnému procvičení

Příklad 3.17. Spočítejte

$$\sum_{i=-5}^5 (1 + 2i), \quad \prod_{i=-5}^5 (1 + 2i).$$

Příklad 3.18. Spočítejte

$$\sum_{\ell=-1}^3 (6^\ell + \ell^6), \quad \prod_{\ell=-1}^3 (6^\ell + \ell^6).$$

Příklad 3.19. Spočítejte

$$\sum_{j=1}^{20} (3j - 6), \quad \prod_{j=1}^{20} (3j - 6).$$

Příklad 3.20. Spočítejte

$$\sum_{k=0}^{20} (k+1)(k+2), \quad \prod_{k=0}^{20} \frac{k+1}{k+2}.$$

Příklad 3.21. Spočítejte (produkt zapište pomocí faktoriálu)

$$\sum_{j=-5}^n (3-j), \quad \prod_{j=4}^n (3-j).$$

Příklad 3.22. Spočítejte

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}, \quad \prod_{k=1}^n \frac{1}{2^k}.$$

Příklad 3.23. Spočítejte

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{3^{2k+1}}.$$

Příklad 3.24. Spočítejte

$$\sum_{j=1}^k \sqrt{2^j}, \quad \prod_{j=1}^k \sqrt{2^j}.$$

Příklad 3.25. Spočítejte (produkt запиšte pomocí faktoriálu)

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k), \quad \prod_{k=1}^{n-1} (n-k).$$

Příklad 3.26. Spočítejte (produkt запиšte pomocí faktoriálu)

$$\sum_{j=1}^{n-1} (n-j)^2, \quad \prod_{j=1}^{n-1} (n-j)^2.$$

Příklad 3.27. Spočítejte

$$\sum_{j=-m}^m j^3, \quad \prod_{j=-m}^m j^3.$$