3 Zkrácené psaní součtu a součinu

Hlavní cíl: Pochopit, co zkrácený zápis znamená, a znát součet aritmetické a geometrické posloupnosti.

3.1 Příklady na sumy

Posloupnost je funkce s definičním oborem $\mathbb{N}$. Budeme uvažovat reálné posloupnosti, tj. funkce: $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. U posloupností je zvykem proměnnou nazývat index a psát ji do indexu, tj. $a_n = a(n)$.

Definice 3.1. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n & \text{pro } n \geq m, \\ 0 & \text{pro } n < m. \end{cases}$$

Symbol k se nazývá **sčítací index** (obvykle volíme písmenka i, j, k, ℓ), m je **dolní mez** sumy, n je **horní mez**.

Příklad 3.1. Vypočítejte

$$\sum_{k=-1}^{2} k^3, \quad \sum_{k=1}^{3} 4, \quad \sum_{j=-1}^{1} (2j-1), \quad \sum_{\ell=0}^{3} \frac{\ell}{2}$$

Věta 3.1. *Zřejmě platí*

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k + \sum_{k=m}^{n} b_k,$$
$$\sum_{k=m}^{n} c a_k = c \sum_{k=m}^{n} a_k, \ c \in \mathbb{R}.$$

Příklad 3.2. Posouvejte index a zachovejte rovnost, např.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=5}^{?} a_?,$$
$$\sum_{k=5}^{10} \frac{2k}{k-1} = \sum_{k=?}^{7} ??,$$
$$\sum_{k=5}^{10} (3k+1)^2 = \sum_{k=?}^{?} (3k-5)^2, \text{ atd.}$$

Příklad 3.3. Zjednodušte

$$\sum_{k=1}^{2n} k + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k.$$

Řešení: $4 \sum_{j=1}^{n} j$.

Příklad 3.4. Sečtěte

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(1+n)n}{2} = \frac{(1.\text{člen}+\text{poslední člen})\cdot\text{počet členů}}{2}.$$

Příklad 3.5. Sečtěte aritmetickou posloupnost s diferencí d

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kd) = \frac{(1.\text{člen}+\text{poslední člen})\cdot\text{počet členů}}{2}.$$

Postup řešení:

$$\sum_{k=0}^{n}(a+kd) = (n+1)\,a + d\sum_{k=1}^{n} k = \left(\frac{a+(a+nd)}{2}\right)(n+1)$$

□

Příklad 3.6. Sečtěte

$$\sum_{k=1}^{100}(k-10)\,,\quad \sum_{j=0}^{5}(2j-1)\,,\quad \sum_{\ell=2}^{11}(-5\ell+7)\,.$$

Příklad 3.7. Sečtěte

$$\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Příklad 3.8. Sečtěte pro $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 1.\text{člen}\cdot\frac{q^{\text{počet členů}}-1}{q-1}.$$

Nápověda: Vypočítejte $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$. □

Postup řešení: **Na přednášce.** □

Příklad 3.9. Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^{10} 2^k,\quad \sum_{k=1}^{5} 2^{2k},\quad \sum_{j=0}^{n} 3\cdot\frac{4^j}{5^{j+1}}.$$

Nápověda: Využití vzorce pro geometrickou posloupnost. □

Příklad 3.10. Vypočítejte

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,k.$$

Řešení:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\,k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{pro } n \text{ liché,}\\ \frac{n-1}{2}-n & \text{pro } n \text{ sudé.}\end{cases}$$

Příklad 3.11. Vypočítejte
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)}.$$

Řešení: $1 - \frac{1}{n+1}$.

Postup řešení: Šikovný trik zapsat $a_k = b_{k+1} - b_k$ nebo $a_k = b_k - b_{k+1}$ (pak se totiž většina členů pokrátí)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

□

Příklad 3.12. Vypočítejte
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$$

Řešení: $\sqrt{n+1} - 1$.

Postup řešení: Opět pomocí předchozího triku

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} = \sum_{k=2}^{n+1} \sqrt{k} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \sqrt{n+1} - 1$$

□

3.2 Příklady na produkty

Definice 3.2. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \begin{cases} a_m a_{m+1} \cdots a_n & \text{pro } n \geq m, \\ 1 & \text{pro } n < m. \end{cases}$$

Věta 3.2. *Zřejmě platí*
$$\prod_{k=m}^{n} (a_k b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right),$$
$$\prod_{k=m}^{n} c a_k = c^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k, \; c \in \mathbb{R}.$$

Definice 3.3. Faktoriál z čísla $n = 0, 1, 2, \ldots$ definujeme jako
$$n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Příklad 3.13. Vypočítejte
$$\prod_{k=1}^{5} 2, \quad \prod_{j=2}^{5} j^2$$

Příklad 3.14. Vypočítejte
$$\frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=2}^{n+1} a_k}$$
pro $a_k \neq 0$.

Řešení: $\frac{a_1}{a_{n+1}}$.

Příklad 3.15. Vypočítejte
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

Řešení: $n + 1$.

Postup řešení:
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \cdots = n + 1$$
Viz předchozí úloha. □

Příklad 3.16. Vypočítejte
$$\prod_{k=0}^{n} (3 \cdot 2^k).$$

Řešení: $3^{n+1} 2^{n(n+1)/2}$.

Postup řešení:
$$\prod_{k=0}^{n} (3 \cdot 2^k) = 3^{n+1} \prod_{k=0}^{n} 2^k = 3^{n+1} 2^{\sum\limits_{k=0}^{n} k} = 3^{n+1} 2^{n(n+1)/2}$$
□

3.3 Příklady k samostatnému procvičení

Příklad 3.17. Spočítejte
$$\sum_{i=-5}^{5} (1 + 2i)\,, \quad \prod_{i=-5}^{5} (1 + 2i)\,.$$

Příklad 3.18. Spočítejte
$$\sum_{\ell=-1}^{3} (6^\ell + \ell^6)\,, \quad \prod_{\ell=-1}^{3} (6^\ell + \ell^6)\,.$$

Příklad 3.19. Spočítejte
$$\sum_{j=1}^{20} (3j - 6)\,, \quad \prod_{j=1}^{20} (3j - 6)\,.$$

Příklad 3.20. Spočítejte

$$\sum_{k=0}^{20} (k+1)\,(k+2)\,, \quad \prod_{k=0}^{20} \frac{k+1}{k+2}.$$

Příklad 3.21. Spočítejte (produkt zapište pomocí faktoriálu)

$$\sum_{j=-5}^{n} (3-j)\,, \quad \prod_{j=4}^{n} (3-j).$$

Příklad 3.22. Spočítejte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}, \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

Příklad 3.23. Spočítejte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{2k+1}}.$$

Příklad 3.24. Spočítejte

$$\sum_{j=1}^{k} \sqrt{2^j}, \quad \prod_{j=1}^{k} \sqrt{2^j}.$$

Příklad 3.25. Spočítejte (produkt zapište pomocí faktoriálu)

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\,, \quad \prod_{k=1}^{n-1} (n-k)\,.$$

Příklad 3.26. Spočítejte (produkt zapište pomocí faktoriálu)

$$\sum_{j=1}^{n-1} (n-j)^2\,, \quad \prod_{j=1}^{n-1} (n-j)^2\,.$$

Příklad 3.27. Spočítejte

$$\sum_{j=-m}^{m} j^3, \quad \prod_{j=-m}^{m} j^3.$$