

4 Logika a důkazy

4.1 Výroková logika

Příklad 4.1. Které z následujících vět jsou výroky z hlediska matematické logiky a které ne? Ty, které jsou výroky, znegujte. Zkuste vyslovit negace nejpřirozenějším způsobem z pohledu českého jazyka.

- 1) „Na státní vlajce České republiky je modrý trojúhelník.“
- 2) „Zpomalte!“
- 3) „Máme dnes k obědu něco chutného?“
- 4) „Číslo 3 je záporné.“
- 5) „Mám na sobě modré tričko.“
- 6) „Z Prahy do Brna je alespoň 10 vlakových spojů denně.“
- 7) „ $x < 10$.“
- 8) „Daná rovnice má právě jeden kořen.“
- 9) „Tato věta není pravdivá.“
- 10) „Všichni studenti našeho kruhu jsou přítomni na dnešním cvičení.“
- 11) „Číslo 10 patří do množiny reálných čísel a současně číslo 10 patří do množiny celých čísel.“
- 12) „Včera Jan snědl dort nebo zmrzlinu.“

Příklad 4.2. Každé z následujících tvrzení formalizujte ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$ a rozhodněte o její pravdivosti. Určete, co je nutná a co je postačující podmínka. Zjistěte, zda platí obrácená implikace $B \Rightarrow A$, tj. můžeme-li mluvit o ekvivalenci $A \Leftrightarrow B$?

- 1) „Mějme libovolné celé číslo n . Když n je sudé, potom $n + 1$ je číslo liché.“
- 2) „Každý rovnostranný trojúhelník je rovnoramenný.“
- 3) „K získání zápočtu z matematické analýzy je třeba chodit na cvičení z tohoto předmětu.“

Příklad 4.3. Uvažujme implikaci „Jestliže Jaderka patří mezi těžší fakulty ČVUT, pak není dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli“. Které z následujících implikací jsou obměněné ke zmíněné?

(Implikace $\neg B \Rightarrow \neg A$ se nazývá **obměněná implikace** k implikaci $A \Rightarrow B$. Dost často se plete s implikací obrácenou $B \Rightarrow A$.)

A	„Není dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli, z čehož plyne, že Jaderka patří mezi těžší fakulty ČVUT.“
B	„Jestliže není dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli, pak Jaderka patří mezi těžší fakulty ČVUT.“
C	„Jestliže je dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli, pak Jaderka nepatří mezi těžší fakulty ČVUT.“
D	„Není dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli, proto Jaderka patří mezi těžší fakulty ČVUT.“
E	„Je dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli. Z toho plyne, že Jaderka nepatří mezi těžší fakulty ČVUT.“

Příklad 4.4. Pomocí pravdivostní tabulky dokažte „zřejmé“ logické pravidlo **modus ponens** neboli **pravidlo odloučení**:

„Z toho, že A je pravda a zároveň $A \Rightarrow B$ je pravda, logicky vyplývá, že B je pravda.“
(Schematicky toto pravidlo někdy zapisují $A, A \Rightarrow B \models B$.)

Příklad 4.5. Jan, Mikuláš a Vojtěch se dohodli, že půjdou na přednášku za těchto podmínek:

- 1) Půjde-li na přednášku Mikuláš, půjde i Vojtěch.
- 2) Nepůjde-li na přednášku Jan, nepůjde ani Vojtěch.
- 3) Na přednášku půjde Jan nebo Mikuláš.

Jaké jsou možnosti prezenze těchto tří studentů na přednášce tak, aby byly splněny všechny tyto podmínky?

Příklad 4.6. Metodou *přímého důkazu* dokažte tvrzení:

„Nechť f, g jsou reálné funkce. Jestliže jsou liché, pak je $f \cdot g$ funkce sudá.“

Příklad 4.7. Metodou *nepřímého důkazu* dokažte tvrzení:

„Pro každé přirozené číslo n platí: je-li n^2 dělitelné třemi, pak je třemi dělitelné i n .“

Příklad 4.8. Metodou *důkazu sporem* dokažte tvrzení:

„Prvočísel je nekonečně mnoho.“

.....
Doplňující příklady 4.9–4.12 jsou k dispozici na stránce <https://bit.ly/pt-fjfi>.

4.2 Matematická indukce

Příklad 4.13. a) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^n k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n(n + \frac{1}{2})(n + 1).$$

Příklad 4.14. a) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}.$$

b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Příklad 4.15. a) Definujme v posloupnosti $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{11}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_{n+2} = \frac{34}{11}a_{n+1} - \frac{3}{11}a_n.$$

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{1}{11^{n-1}}.$$

b) Nechť $F_1 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_{n+1} = F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n.$$

Dokažte, že $F_n = 2^{n-2}$ pro každé $n \geq 2$.

Příklad 4.16. a) Ukažte, že

$$\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

b) Nechť $a_1 = \frac{1}{3}$ a $a_{n+1} = 2a_n^2$. Dokažte, že $a_n \leq n$.

Příklad 4.17. Mějme $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Pokud z množiny $\{1, 2, \dots, 2n-1\}$ vybereme libovolně $n+1$ čísel, pak ve výběru najdeme $k, \ell, m \in \mathbb{N}$ tak, že $k + \ell = m$.