4 Logika a důkazy

4.1 Výroková logika

Základní příklady

Příklad 4.1. Které z následujících vět jsou výroky z hlediska matematické logiky a které ne? Ty, které jsou výroky, znegujte. Zkuste vyslovit negace nejpřirozenějším způsobem z pohledu českého jazyka.

1) *„Na státní vlajce České republiky je modrý trojúhelník."*
2) *„Zpomalte!"*
3) *„Máme dnes k obědu něco chutného?"*
4) *„Číslo 3 je záporné."*
5) *„Mám na sobě modré tričko."*
6) *„Z Prahy do Brna je alespoň 10 vlakových spojů denně."*
7) „$x < 10$."
8) *„Daná rovnice má právě jeden kořen."*
9) *„Tato věta není pravdivá."*
10) *„Všichni studenti našeho kruhu jsou přítomní na dnešním cvičení."*
11) *„Číslo 10 patří do množiny reálných čísel a současně číslo 10 patří do množiny celých čísel."*
12) *„Včera Jan snědl dort nebo zmrzlinu."*

Příklad 4.2. Každé z následujících tvrzení formalizujte ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$ a rozhodněte o její pravdivosti. Určete, co je nutná a co je postačující podmínka. Zjistěte, zda platí obrácená implikace $B \Rightarrow A$, tj. můžeme-li mluvit o ekvivalenci $A \Leftrightarrow B$?

1) *„Mějme libovolné celé číslo n. Když n je sudé, potom $n + 1$ je číslo liché."*
2) *„Každý rovnostranný trojúhelník je rovnoramenný."*
3) *„K získání zápočtu z matematické analýzy je třeba chodit na cvičení z tohoto předmětu."*

Příklad 4.3. Uvažujme implikaci *„Jestliže Jaderka patří mezi těžší fakulty ČVUT, pak není dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli"*. Které z následujících implikací jsou obměněné ke zmíněné?
(Implikace $\neg B \Rightarrow \neg A$ se nazývá **obměněná implikace** k implikaci $A \Rightarrow B$. Dost často se plete s implikací obrácenou $B \Rightarrow A$.)

A	*„Není dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli, z čehož plyne, že Jaderka patří mezi těžší fakulty ČVUT."*
B	*„Jestliže není dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli, pak Jaderka patří mezi těžší fakulty ČVUT."*
C	*„Jestliže je dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli, pak Jaderka nepatří mezi těžší fakulty ČVUT."*
D	*„Není dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli, proto Jaderka patří mezi těžší fakulty ČVUT."*
E	*„Je dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli. Z toho plyne, že Jaderka nepatří mezi těžší fakulty ČVUT."*

Příklad 4.4. Pomocí pravdivostní tabulky dokažte „zřejmé“ logické pravidlo **modus ponens** neboli **pravidlo odloučení**:

„Z toho, že A je pravda a zároveň $A \Rightarrow B$ je pravda, logicky vyplývá, že B je pravda.“
(Schematicky toto pravidlo někdy zapisují $A, A \Rightarrow B \models B$.)

Příklad 4.5. Jan, Mikuláš a Vojtěch se dohodli, že půjdou na přednášku za těchto podmínek:

1) Půjde-li na přednášku Mikuláš, půjde i Vojtěch.
2) Nepůjde-li na přednášku Jan, nepůjde ani Vojtěch.
3) Na přednášku půjde Jan nebo Mikuláš.

Jaké jsou možnosti prezence těchto tří studentů na přednášce tak, aby byly splněny všechny tyto podmínky?

Příklad 4.6. Metodou *přímého důkazu* dokažte tvrzení:
„Nechť f, g jsou reálné funkce. Jestliže jsou liché, pak je $f \cdot g$ funkce sudá.“

Příklad 4.7. Metodou *nepřímého důkazu* dokažte tvrzení:
„Pro každé přirozené číslo n platí: je-li n^2 dělitelné třemi, pak je třemi dělitelné i n.“

Příklad 4.8. Metodou *důkazu sporem* dokažte tvrzení:
„Prvočísel je nekonečně mnoho.“

. . . .

Doplňující příklady

Příklad 4.9. Pomocí pravdivostní tabulky dokažte ještě jedno „zřejmé“ logické pravidlo **hypotetického sylogismu** neboli **tranzitivity implikace**:

„Z toho, že $A \Rightarrow B$ je pravda a zároveň $B \Rightarrow C$ je pravda, logicky vyplývá, že $A \Rightarrow C$ je pravda.“
(Schematicky: $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$.)

Příklad 4.10. Pokud je kniha X v souladu s trestním zákoníkem, pak je zbytečná. Pokud kniha X v souladu s trestním zákoníkem není, pak je škodlivá. Jestliže je kniha X zbytečná nebo škodlivá, nečteme ji. Pokud někdo pokládá tyto výroky za pravdivé, může z toho usoudit, že knihu X nečteme?
(Zadání této úlohy je adaptací legendy, která popisuje zničení nejvýznamnější a největší knižní sbírky starověku – Alexandrijské knihovny.)

Příklad 4.11. Politická strana Práce a mír potřebuje vysekat svého ministra z žaloby pro korupci. To vyžaduje buďto zastrašit svědka A, nebo podplatit soudce B. Na zastrašení svědka A je potřeba uvěznit osobu C. Pro uplacení soudce B je potřeba obsadit firmu F a získat pro ni zakázku E. Uvěznění osoby C i převzetí firmy F vyžaduje zabít osobu D. Potřebuje Práce a mír zabít D?
(Tento příběh je smyšlený a jakákoliv podobnost se skutečnými postavami či událostmi je čistě náhodná.)

Příklad 4.12. Tři osoby A, B a C jsou podezřelé ze spáchání zločinu. Vypověděly následující:

A: *„B je vinen a C je nevinný.“*
B: *„Je-li vinen A, je vinen i C.“*
C: *„Jsem nevinen, ale alespoň jeden z A a B je vinen.“*

Dejte odpovědi na následující otázky:

1) Mohou být všechny tři výpovědi pravdivé? Pokud ano, kdo v tomto případě je pachatel?
2) Jsou-li všichni nevinní, kdo vypovídal křivě?
3) Mluví-li nevinní pravdu a viníci lžou, kdo je pachatel?

4.2 Matematická indukce

Příklad 4.13. a) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\, n\big(n + \tfrac{1}{2}\big)\big(n+1\big)\,.$$

Příklad 4.14. a) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}.$$

b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Příklad 4.15. a) Definujme v posloupnosti $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{11}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_{n+2} = \frac{34}{11}a_{n+1} - \frac{3}{11}a_n\,.$$

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{1}{11^{n-1}}\,.$$

b) Nechť $F_1 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_{n+1} = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n.$$

Dokažte, že $F_n = 2^{n-2}$ pro každé $n \geq 2$.

Příklad 4.16. a) Ukažte, že

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

b) Nechť $a_1 = \frac{1}{3}$ a $a_{n+1} = 2a_n^2$. Dokažte, že $a_n \leq n$.

Příklad 4.17. Mějme $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Pokud z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ vybereme libovolně $n+1$ čísel, pak ve výběru najdeme $k, \ell, m \in \mathbb{N}$ tak, že $k + \ell = m$.