4 Logika a důkazy

4.1 Výroková logika

Základní příklady

Příklad 4.1. Které z následujících vět jsou výroky z hlediska matematické logiky a které ne? Ty, které jsou výroky, znegujte. Zkuste vyslovit negace nejpřirozenějším způsobem z pohledu českého jazyka.

1) *„Na státní vlajce České republiky je modrý trojúhelník.“*
2) *„Zpomalte!“*
3) *„Máme dnes k obědu něco chutného?“*
4) *„Číslo 3 je záporné.“*
5) *„Mám na sobě modré tričko.“*
6) *„Z Prahy do Brna je alespoň 10 vlakových spojů denně.“*
7) „$x < 10$.“
8) *„Daná rovnice má právě jeden kořen.“*
9) *„Tato věta není pravdivá.“*
10) *„Všichni studenti našeho kruhu jsou přítomní na dnešním cvičení.“*
11) *„Číslo 10 patří do množiny reálných čísel a současně číslo 10 patří do množiny celých čísel.“*
12) *„Včera Jan snědl dort nebo zmrzlinu.“*

Řešení:

1) *„Na státní vlajce České republiky není modrý trojúhelník.“*
2) Toto tvrzení je rozkazovací věta. U rozkazu ale nemá smysl mluvit o pravdivosti, proto nejde o výrok.
3) Toto není výrok. U otázek nemá smysl se zabývat jejich pravdivostí. Něco jiného by se představovaly odpovědi na otázky, ale to je už docela jiná věc.
4) *„Číslo 3 je nezáporné.“* nebo *„Číslo 3 není záporné.“*
5) *„Nemám na sobě modré tričko.“*
6) *„Z Prahy do Brna je méně než 10 vlakových spojů denně.“* nebo *„Z Prahy do Brna je nejvýše 9 vlakových spojů denně.“*
7) Přečteme-li si tento matematický zápis, dostaneme oznamovací větu. Ale co je x? To nevíme. Věta tedy není dostatečně přesná. Abychom mohli hovořit o pravdivosti takové věty, museli bychom vzít v úvahu nějaké další dodatečné informace, ale to jsme si zakázali. Taková tvrzení za výroky nepovažujeme.
8) *„Daná rovnice nemá žádný kořen nebo má alespoň dva kořeny.“*
9) Toto není výrokem, protože, jak lze snadno ověřit, pravdivost nebo nepravdivost této věty nelze určit. To je jeden z tzv. logických paradoxů — *paradox lháře.*
10) *„Někdo ze studentů našeho kruhu na dnešním cvičení chybí.“*
11) *„Číslo 10 nepatří do množiny reálných čísel nebo číslo 10 nepatří do množiny celých čísel.“*
12) *„Včera Jan nesnědl dort ani zmrzlinu.“*

Příklad 4.2. Každé z následujících tvrzení formalizujte ve tvaru implikace $A \Rightarrow B$ a rozhodněte o její pravdivosti. Určete, co je nutná a co je postačující podmínka. Zjistěte, zda platí obrácená implikace $B \Rightarrow A$, tj. můžeme-li mluvit o ekvivalenci $A \Leftrightarrow B$?

1) *„Mějme libovolné celé číslo n. Když n je sudé, potom $n+1$ je číslo liché.“*
2) *„Každý rovnostranný trojúhelník je rovnoramenný.“*
3) *„K získání zápočtu z matematické analýzy je třeba chodit na cvičení z tohoto předmětu.“*

Řešení:

1) $A = \{$*Číslo n je sudé*$\}$, $B = \{$*Číslo $n+1$ je liché*$\}$, implikace $A \Rightarrow B$ je pravdivá. A je postačující podmínka pro B, B je nutná podmínka pro A. Obrácená implikace $B \Rightarrow A$ je pravdivá, proto ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ platí.
2) $A = \{$*Daný trojúhelník je rovnostranný*$\}$, $B = \{$*Daný trojúhelník je rovnoramenný*$\}$, implikace $A \Rightarrow B$ je pravdivá. A je postačující podmínka pro B, B je nutná podmínka pro A. Obrácená implikace $B \Rightarrow A$ není pravdivá, proto ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ neplatí.
3) $A = \{$*Student získal zápočet z matematické analýzy*$\}$, $B = \{$*Student chodil na cvičení z matematické analýzy*$\}$, implikace $A \Rightarrow B$ je pravdivá. A je postačující podmínka pro B, B je nutná podmínka pro A, nikoliv naopak ;) Obrácená implikace zřejmě $B \Rightarrow A$ není pravdivá, proto ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ neplatí.

Příklad 4.3. Uvažujme implikaci *„Jestliže Jaderka patří mezi těžší fakulty ČVUT, pak není dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli“*. Které z následujících implikací jsou obměněné ke zmíněné?
(Implikace $\neg B \Rightarrow \neg A$ se nazývá **obměněná implikace** k implikaci $A \Rightarrow B$. Dost často se plete s implikací obrácenou $B \Rightarrow A$.)

A	*„Není dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli, z čehož plyne, že Jaderka patří mezi těžší fakulty ČVUT.“*
B	*„Jestliže není dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli, pak Jaderka patří mezi těžší fakulty ČVUT.“*
C	*„Jestliže je dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli, pak Jaderka nepatří mezi těžší fakulty ČVUT.“*
D	*„Není dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli, proto Jaderka patří mezi těžší fakulty ČVUT.“*
E	*„Je dobrý nápad učit se všechno na poslední chvíli. Z toho plyne, že Jaderka nepatří mezi těžší fakulty ČVUT.“*

Řešení: C, E. Pozor! D je obrácená implikace, což je jiná věc.

Příklad 4.4. Pomocí pravdivostní tabulky dokažte „zřejmé“ logické pravidlo **modus ponens** neboli **pravidlo odloučení**:

„Z toho, že A je pravda a zároveň $A \Rightarrow B$ je pravda, logicky vyplývá, že B je pravda.“
(Schematicky toto pravidlo někdy zapisují $A, A \Rightarrow B \models B$.)

Postup řešení: Sestrojíme pravdivostní tabulku:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Z tabulky plyne, že se jedná výhradně o poslední řádek této tabulky, kde současně $\nu(A) = 1$ a $\nu(A \Rightarrow B) = 1$. V tomto řádku vidíme, že $\nu(B) = 1$. □

Příklad 4.5. Jan, Mikuláš a Vojtěch se dohodli, že půjdou na přednášku za těchto podmínek:

1) Půjde-li na přednášku Mikuláš, půjde i Vojtěch.
2) Nepůjde-li na přednášku Jan, nepůjde ani Vojtěch.
3) Na přednášku půjde Jan nebo Mikuláš.

Jaké jsou možnosti prezence těchto tří studentů na přednášce tak, aby byly splněny všechny tyto podmínky?

Řešení: Možnosti jsou tři: 1) na přednášku půjde pouze Jan; 2) na přednášku půjde Jan a Vojtěch; 3) na přednášku půjdou všichni tři.

Postup řešení: ► 1. způsob. Vyjdeme z přirozeného smyslu implikace a disjunkce. Začneme třetím výrokem, který nám nabízí dva (nevýlučné) případy: na přednášce bude Jan nebo Mikuláš.

Pokud půjde Mikuláš, pak z prvního výroku máme, že bude poslouchat přednášku i Vojtěch. Může Jan nejít na přednášku v tomto případě? Druhý výrok říká, že pak by na přednášku nešel Vojtěch, ale ten už tam sedí. Proto všichni tři budou na přednášce.

Pokud půjde Jan, u druhého výroku levá část implikace je nepravdivá. Pak Vojtěch může jít na přednášku nebo ne. Mikuláš nyní svobodně rozhoduje sám. Ale pokud se rozhodne jít, tak se k němu připojí i Vojtěch kvůli první podmínce. Pokud Mikuláš bude mít jiné plány, pak se Vojtěch stále může rozhodnout jít či nejít. Máme tedy následující možnosti: 1) jde na přednášku pouze Jan; 2) jdou na přednášku Jan, Mikuláš, a tedy i Vojtěch; 3) jdou Jan a Vojtěch.

► 2. způsob. Sestavíme výroky:

$J = \{\textit{Jan půjde na přednášku}\};$
$M = \{\textit{Mikuláš půjde na přednášku}\};$
$V = \{\textit{Vojtěch půjde na přednášku}\}.$

Určíme výrokové formule podle zadaných podmínek:

$\mathcal{A} : M \Rightarrow V;$
$\mathcal{B} : \neg J \Rightarrow \neg V;$
$\mathcal{C} : J \vee M.$

Sestavíme pravdivostní tabulku podle zadaných podmínek:

J	M	V	$\mathcal{A}$	$\neg J$	$\neg V$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$
0	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	1	1

Teď koukněme na jedničky v posledním sloupci. Máme tedy tři možnosti: 1) na přednášku půjde pouze Jan; 2) na přednášku půjde Jan a Vojtěch; 3) na přednášku půjdou všichni tři. □

Příklad 4.6. Metodou *přímého důkazu* dokažte tvrzení:

„Nechť f, g jsou reálné funkce. Jestliže jsou liché, pak je $f \cdot g$ funkce sudá.“

Nápověda: V překladu do formální logiky jde o výrok:

„Pro každou reálnou funkci f a pro každou reálnou funkci g: jestliže f je lichá a g je lichá, pak $f \cdot g$ je sudá.“

Dále využijeme definice liché a sudé funkce. □

Příklad 4.7. Metodou *nepřímého důkazu* dokažte tvrzení:

„Pro každé přirozené číslo n platí: je-li n^2 dělitelné třemi, pak je třemi dělitelné i n.“

Nápověda: Nejprve si připomeňme, že nepřímý důkaz věty $A \Rightarrow B$ spočívá v tom, že místo ní dokazujeme ekvivalentní obměněnou implikaci $\neg B \Rightarrow \neg A$. V našem případě tedy jde o dokazování pro každé přirozené číslo n tvrzení *„Pokud číslo n není dělitelné třemi, pak ani n^2 není dělitelné třemi“*. Všimněme si dále, že pokud číslo n není dělitelné třemi, z definice dělitelnosti se zbytkem rozlišujeme dva případy: $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ $(k \in \mathbb{Z})$. □

Příklad 4.8. Metodou *důkazu sporem* dokažte tvrzení:

„Prvočísel je nekonečně mnoho.“

. . . .

Doplňující příklady

Příklad 4.9. Pomocí pravdivostní tabulky dokažte ještě jedno „zřejmé“ logické pravidlo **hypotetického sylogismu** neboli **tranzitivity implikace**:

„Z toho, že $A \Rightarrow B$ je pravda a zároveň $B \Rightarrow C$ je pravda, logicky vyplývá, že $A \Rightarrow C$ je pravda.“

(Schematicky: $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$.)

Postup řešení: Obdobně př. 4.4. □

Příklad 4.10. Pokud je kniha X v souladu s trestním zákoníkem, pak je zbytečná. Pokud kniha X v souladu s trestním zákoníkem není, pak je škodlivá. Jestliže je kniha X zbytečná nebo škodlivá, nečteme ji. Pokud někdo pokládá tyto výroky za pravdivé, může z toho usoudit, že knihu X nečteme?
(Zadání této úlohy je adaptací legendy, která popisuje zničení nejvýznamnější a největší knižní sbírky starověku – Alexandrijské knihovny.)

Řešení: Ano.

Příklad 4.11. Politická strana Práce a mír potřebuje vysekat svého ministra z žaloby pro korupci. To vyžaduje buďto zastrašit svědka A, nebo podplatit soudce B. Na zastrašení svědka A je potřeba uvěznit osobu C. Pro uplacení soudce B je potřeba obsadit firmu F a získat pro ni zakázku E. Uvěznění osoby C i převzetí firmy F vyžaduje zabít osobu D. Potřebuje Práce a mír zabít D?
(Tento příběh je smyšlený a jakákoliv podobnost se skutečnými postavami či událostmi je čistě náhodná.)

Příklad 4.12. Tři osoby A, B a C jsou podezřelé ze spáchání zločinu. Vypověděly následující:

A: *„B je vinen a C je nevinný."*
B: *„Je-li vinen A, je vinen i C."*
C: *„Jsem nevinen, ale alespoň jeden z A a B je vinen."*

Dejte odpovědi na následující otázky:

1) Mohou být všechny tři výpovědi pravdivé? Pokud ano, kdo v tomto případě je pachatel?
2) Jsou-li všichni nevinní, kdo vypovídal křivě?
3) Mluví-li nevinní pravdu a viníci lžou, kdo je pachatel?

Řešení: 1) ano, pachatel je osoba B; 2) křivě vypovídaly osoby A a C; 3) pachateli jsou osoby A a C.

4.2 Matematická indukce

Příklad 4.13. a) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3} n\left(n+\tfrac{1}{2}\right)(n+1)\,.$$

Příklad 4.14. a) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}.$$

b) Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Příklad 4.15. a) Definujme v posloupnosti $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{11}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_{n+2} = \frac{34}{11}a_{n+1} - \frac{3}{11}a_n\,.$$

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_n = \frac{1}{11^{n-1}}\,.$$

b) Nechť $F_1 = 1$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$F_{n+1} = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n.$$

Dokažte, že $F_n = 2^{n-2}$ pro každé $n \geq 2$.

Příklad 4.16. a) Ukažte, že

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

b) Nechť $a_1 = \frac{1}{3}$ a $a_{n+1} = 2a_n^2$. Dokažte, že $a_n \leq n$.

Nápověda:

a) Kdyby se to nedařilo dokázat indukcí, zkuste dokázat indukcí

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

To půjde snadno. A protože $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, máme dokázané i první tvrzení.
Poučení: Občas nelze dokázat tvrzení indukcí proto, že dokazujeme zbytečně slabší tvrzení, než platí.

b) Indukce nefunguje, protože dokazujme slabé tvrzení. Přitom se snadno indukcí ukáže, že $a_n \leq \frac{1}{2}$.

□

Příklad 4.17. Mějme $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Pokud z množiny $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ vybereme libovolně $n+1$ čísel, pak ve výběru najdeme $k, \ell, m \in \mathbb{N}$ tak, že $k + \ell = m$.